NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Émile BOREL,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
CHARGÉ DU COURS INSTITUÉ AU COLLÈGE DE FRANCE PAR LA FONDATION PECCOT.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

TABLE DES MATIÈRES.

Séries divergentes.

Fonctions entières et méromorphes.

Équations différentielles.

Géométrie.

Enseignement.

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Émile BOREL,

TITRES DIVERS.

Élève de l'École Normale supérieure	1889-1892
Docteur ès Sciences	1894
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille	Nov. 1893-Janv. 1897
Maître de Conférences à l'École Normale supérieure	depuis janvier 1897
Chargé d'un Cours de Mathématiques au Collège de France (fondation Peccot)	1899-1900 et 1900-1901
Lauréat de l'Institut : Grand Prix des Sciences mathématiques	1898
Présenté en troisième ligne par la Section de Géométrie	1900

BIBLIOGRAPHIE.

Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.

1. Sur quelques points de la théorie des fonctions (12 février 1894; t. CXVIII, p. 340).
2. Sur une propriété des fonctions méromorphes (11 février 1895; t. CXX, p. 303).
3. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles (25 mars 1895; t. CXX, p. 677).
4. Sur les fonctions de deux variables réelles et sur la notion de fonction arbitraire (2 décembre 1895; t. CXXI, p. 811).
5. Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques (16 décembre 1895; t. CXXI, p. 933).
6. Sur la sommation des séries divergentes (30 décembre 1895; t. CXXI, p. 1125).
7. Sur la généralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théorème d'Abel sur les séries entières (13 janvier 1896; t. CXXII, p. 73).
8. Applications de la théorie des séries divergentes sommables (7 avril 1896; t. CXXII, p. 805).
9. Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières (11 mai 1896; t. CXXII, p. 1045).
10. Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor (5 octobre 1896; t. CXXIII, p. 548).
11. Sur l'extension aux fonctions entières d'une propriété importante des polynomes (12 octobre 1896; t. CXXIII, p. 556).
12. Sur les séries de Taylor (14 décembre 1896; t. CXXIII, p. 1051).
13. Sur l'interpolation (29 mars 1897; t. CXXIV, p. 673).
14. Sur les types de croissance et sur les fonctions entières (24 janvier 1898; t. CXXVI, p. 321).
15. Sur les développements des fonctions uniformes en séries de Taylor (14 novembre 1898; t. CXXVII, p. 751).
16. Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor (12 décembre 1898; t. CXXVII, p. 1001).
17. Sur le prolongement des fonctions analytiques (30 janvier 1899; t. CXXVIII, p. 283).

18. Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles (20 février 1899; t. CXXVIII, p. 490).
19. Sur la nature arithmétique du nombre e (6 mars 1899; t. CXXVIII, p. 596).
20. Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul (23 mai 1899; t. CXXVIII, p. 1281).
21. Sur les séries de fractions rationnelles (17 avril 1900; t. CXXX, p. 1061).
22. Sur la généralisation du prolongement analytique (23 avril 1900; t. CXXX, p. 1115).
23. Les séries absolument sommables, les séries (M) et le prolongement analytique (19 novembre 1900; t. CXXXI, p. 830).

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

24. Fondements de la théorie des séries divergentes sommables (5e série, t. II; 1896).
25. Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure (*Ibid.*).

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.

26. Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles (3e série, t. IX; 1892).
27. Sur quelques points de la théorie des fonctions (3e série, t. XII; 1895). (Publié aussi comme Thèse de Doctorat: Paris, Gauthier-Villars; 1894.)
28. Sur les fonctions de deux variables réelles (3e série, t. XIII; 1896).
29. Mémoire sur les séries divergentes (couronné par l'Académie des Sciences, Grand Prix des Sciences mathématiques) (3e série, t. XVI; 1899).
30. Addition au Mémoire sur les séries divergentes (*Ibid.*).

Acta Mathematica.

31. Sur les zéros des fonctions entières (t. XX).
32. Sur les séries de Taylor (t. XXI).
33. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles (t. XXIV).
34. Addition au Mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles (*Ibid.*).

Bulletin des Sciences mathématiques.

35. Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente (2e série, t. XIV, 1890).
36. Sur une application d'un théorème de M. Hadamard (2e série, t. XVIII; 1894).
37. Remarques sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (2e série, t. XIX, 1895).
38. Sur le théorème de Descartes (2e série, t. XX, 1896).
39. Sur la méthode d'approximation de Laguerre (2e série, t. XXII; 1898).
40. Sur les diviseurs numériques des polynomes (2e série, t. XXIV; 1900).

Bulletin de la Société mathématique de France.

41. Sur les caractéristiques des fonctions θ (t. XXVI, 1898).
42. Sur les singularités des séries de Taylor (*Ibid.*).
43. Sur le prolongement analytique de la série de Taylor (t. XXVIII, 1900).
44. Sur les formules d'Olinde Rodrigues (t. XXIX, 1901).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

45. Remarque sur les problèmes de forces centrales (3e série, t. XV, 1896).

Ouvrages séparés.

46. Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure, d'après des Conférences de M. J. Tannery (en collaboration avec M. Jules Drach) (Paris, Nony; 1895).
47. Note sur les transformations en Géométrie (annexée au tome III de la *Géométrie analytique* de M. Niewenglowski) (Paris, Gauthier-Villars; 1896).
48. Leçons sur la théorie des fonctions (Paris, Gauthier-Villars; 1898).
49. Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions. Leçons sur les fonctions entières (Paris, Gauthier-Villars; 1900).
50. Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions. Leçons sur les séries divergentes (Paris, Gauthier-Villars; 1901).

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSÉ GÉNÉRAL DES RECHERCHES.

I. — Introduction.

La plupart de mes travaux ont pour objet la théorie des fonctions; prise dans son sens le plus large, cette expression embrasse presque toute l'Analyse; aussi ne sera-t-il pas inutile d'indiquer tout d'abord brièvement dans quel sens se sont principalement dirigés mes efforts.

On me permettra une remarque préliminaire : dans les recherches sur la théorie des fonctions, comme dans beaucoup d'autres, l'induction joue un grand rôle; on est guidé par des idées, parfois un peu confuses, qui se précisent à mesure qu'elles conduisent à des résultats. Il me paraît y avoir avantage à exposer mes recherches comme si les idées que je me suis créé peu à peu avaient eu dès le début toute leur netteté; j'espère être ainsi plus clair, tout en étant plus bref.

La théorie des fonctions est née le jour où l'on s'est servi pour la première fois d'un symbole tel que $f(x)$ pour désigner le résultat d'une opération non déterminée effectuée sur x, de même que l'Algèbre était née le jour où l'on s'était servi de la lettre x pour désigner un nombre non déterminé. D'ailleurs, l'emploi de la notation algébrique a conduit peu à peu à généraliser l'idée de nombre (nombres complexes, quaternions, etc.); de même l'emploi de la notation fonctionnelle a conduit à généraliser la notion de fonction. Cette notion est devenue de plus en plus compréhensive; d'où une grande difficulté sur laquelle il n'est pas inutile d'insister un peu.

A mesure qu'augmente le nombre des êtres analytiques auxquels on donne le nom de *fonctions,* les propriétés communes à tous ces êtres deviennent nécessairement plus rares, de sorte que l'on risque de réduire presque à néant la théorie des fonctions, si l'on veut trop en étendre le champ. On est donc conduit à apporter, à l'idée trop générale de fonc-

tion, des restrictions destinées à en rendre l'étude plus féconde. Il entre nécessairement un certain arbitraire dans le choix de ces restrictions, d'où l'existence de théories différentes, et la possibilité de discussions, non sur les faits, mais sur leur interprétation.

Rappelons rapidement les principaux points de vue auxquels on se plaça, dans le dernier tiers du XIXe siècle :

1° En ce qui concerne les fonctions de variable complexe, Weierstrass avait précisé la notion de *fonction analytique*, à peu près équivalente à la *fonction monogène* de Cauchy, mais plus nettement délimitée; la conception de Cauchy se prête mieux à la généralisation; constatons simplement ici les immenses services rendus par la conception de Weierstrass.

2° En ce qui concerne les fonctions de variable réelle, on a adopté tour à tour deux partis extrêmes; d'une part, se contenter de considérer les fonctions analytiques, au sens de Weierstrass; d'autre part, introduire le moins de restrictions possible dans la définition; à ce dernier point de vue se rattachent notamment les travaux de Weierstrass sur les fonctions continues non dérivables, de Riemann sur la notion d'intégrale, de M. Darboux sur les fonctions discontinues, de M. G. Cantor sur les séries trigonométriques, de M. Jordan sur les fonctions à variation bornée et sur les intégrales définies, et, plus récemment, ceux de M. Baire.

Ce dernier point de vue se trouve, dans les applications, être souvent trop large, tandis que le premier est souvent trop étroit, comme j'ai contribué à le montrer (XXIX, 5) [1]. Il y a donc lieu de se demander s'il n'y aurait pas intérêt à adopter un point de vue intermédiaire, c'est-à-dire à imposer à la notion trop générale de fonction de variable réelle des restrictions moins étendues que celles qui résultent de la définition des fonctions analytiques. L'un des moyens les plus naturels pour y parvenir consiste à chercher à généraliser la notion de fonction analytique : j'ai obtenu des résultats d'où l'on peut déduire une notion à la fois plus large que la notion de fonction analytique et plus précise que la simple notion de fonction continue de variable réelle (XI, XII). On s'accordera, d'ailleurs, je l'espère, à reconnaître que certains de ces résultats présentent un intérêt propre, indépendamment de toute considération théorique.

Dans les recherches générales sur les fonctions il se présente souvent une difficulté qui est connexe à celle dont il vient d'être question, mais qui

---

[1] Les chiffres romains renvoient aux paragraphes de la Notice; les chiffres arabes, à la bibliographie.

mérite cependant d'être examinée à part. Cette difficulté est due à la multiplicité *transfinie* des types de croissance; Paul du Bois-Reymond fut le premier à la mettre en évidence, mais ses remarquables résultats étaient restés peu connus. J'en ai fait de multiples applications et crois avoir montré nettement leur grande importance. De plus, j'ai fait voir, par des exemples divers, que les difficultés signalées par Paul du Bois-Reymond s'introduisent en réalité dès l'étude du développement en fraction continue d'un nombre incommensurable arbitraire : d'où la conséquence assez inattendue que ces difficultés ne peuvent être évitées, si l'on ne tient pas compte de la nature arithmétique des constantes qui figurent dans les calculs. J'ai été ainsi conduit à faire quelques recherches sur la nature arithmétique des irrationnelles (VII, XXIX).

Mais les théorèmes de Paul du Bois-Reymond sur les fonctions croissantes sont surtout relatifs à la *rapidité* de la croissance; une étude plus approfondie montre que ce que j'ai appelé le *mode* de croissance est une notion plus importante encore et je crois avoir signalé le premier le grand avantage qu'il y avait à étudier d'une manière spéciale le *mode de croissance exponentiel*, c'est-à-dire en relation simple avec la fonction exponentielle.

Ces diverses considérations sur la croissance des fonctions m'ont conduit à de nombreux résultats dans la théorie des fonctions entières; l'importance du mode de croissance exponentiel est, de plus, étroitement liée avec ma théorie des séries divergentes sommables.

Mes recherches sur cette théorie sont, d'ailleurs, inspirées par des idées analogues à celles qui m'ont amené à généraliser la notion de fonction analytique. On a été conduit, en effet, à ne considérer que des séries convergentes par la difficulté trop grande qu'il y aurait à éviter l'erreur, en se servant de *toutes* les séries divergentes; de même que l'on se borne aux fonctions analytiques parce qu'il est trop compliqué de considérer *toutes* les fonctions (ou même *toutes les fonctions continues*). Mais il peut y avoir intérêt à étudier des *classes déterminées* de fonctions non analytiques, des *classes déterminées* de séries non convergentes.

J'espère avoir rendu sensibles les relations qui existent entre les trois principaux sujets sur lesquels ont porté mes recherches : la notion de fonction, les fonctions entières et les séries divergentes. Je vais tâcher d'indiquer rapidement la marche générale que j'ai suivie dans l'étude de chacun de ces sujets, réservant pour la deuxième partie l'analyse détaillée des résultats obtenus, soit sur ces questions, soit sur quelques autres.

II. — La notion de fonction.

Weierstrass a le premier montré d'une manière nette la différence qu'il y a entre une *expression analytique* et une *fonction analytique;* une même série peut représenter, dans des domaines différents, des fonctions n'ayant aucun rapport entre elles. Il semble donc qu'il ne soit pas possible de parler du prolongement d'une fonction analytique au delà de sa limite naturelle.

Un fait important, découvert par M. Poincaré, rendit cette opinion encore plus vraisemblable : étant données deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ absolument quelconques, définies l'une seulement à l'extérieur d'un cercle C, l'autre seulement à l'intérieur et admettant toutes deux la circonférence comme limite naturelle, M. Poincaré construit deux fonctions $g(z)$ et $h(z)$, *uniformes dans tout le plan,* admettant chacune comme ligne singulière un arc de C, et telles que leur somme soit égale à $f(z)$ à l'extérieur de C, à $f_1(z)$ à l'intérieur. On est ainsi amené, par une voie autre que celle de Weierstrass, à regarder les deux fonctions *quelconques* $f(z)$ et $f_1(z)$ comme le *prolongement* l'une de l'autre : cette expression paraît donc n'avoir aucun sens.

J'ai cherché à montrer dans ma Thèse (27) (¹) que ces difficultés ne sont pas insurmontables ; les idées que j'y émettais ont été confirmées par mes travaux ultérieurs (XI, XII, 30, 33, 34) ; on peut les résumer ainsi : l'objection de Weierstrass ne concerne que des séries particulières de fractions rationnelles ; elle prouve donc simplement qu'il sera nécessaire de se borner à étudier des classes déterminées de telles séries ; les travaux de M. Poincaré, de M. Appell, de M. Runge, de M. Painlevé fournissent d'ailleurs des indications précieuses sur les séries qu'il y aura lieu d'exclure ; quant à l'objection de M. Poincaré, elle disparaît si l'on consent à modifier la définition de l'uniformité : or, cette modification est intimement liée avec l'extension de la notion de prolongement ; si l'on regarde comme possibles des prolongements qui ne l'étaient pas, il sera nécessaire de regarder comme non uniformes des fonctions qui étaient uniformes ; et si l'on admet que $g(z)$ et $h(z)$ ne sont pas uniformes, le résultat qui vient d'être rappelé n'a plus rien que de très naturel.

J'ai donc pu, sans contredire la théorie de Weierstrass, la généra-

(¹) Soutenue le 14 juin 1894. MM. Darboux, *Président;* Appell ; Poincaré, *Rapporteur.*

liser (XI, XII); je me suis surtout servi, dans ce but, de séries de fractions rationnelles. La méthode que j'ai employée pour l'étude de ces séries repose essentiellement sur la considération du domaine D que l'on obtient lorsqu'on exclut du plan l'intérieur de certains cercles ayant pour centres les points singuliers. Si ces cercles sont assez petits, leur surface totale peut être très faible, même si leur nombre est infini; de sorte que l'on peut tracer des courbes extérieures à tous ces cercles, même dans des régions où leurs centres forment un ensemble *dense;* par exemple, si ces centres sont tous les points intérieurs à un carré et dont les deux coordonnées sont des nombres rationnels. Les fonctions que j'étudie ont dans le domaine D des propriétés très simples, aussi semblables à celles des fonctions analytiques que le permet la forme très spéciale de ce domaine (XIII).

L'existence de ce domaine D peut d'ailleurs être établie sans aucune hypothèse sur la distribution dans le plan des points singuliers; cette distribution ne joue dès lors presque aucun rôle et toutes les discussions très délicates relatives aux singularités qu'elle peut présenter se trouvent être évitées.

III. — Les fonctions entières.

Le problème fondamental que je me suis proposé, dans mes recherches sur les fonctions entières, est le suivant : Étant donnée une fonction entière, soit $\varphi(r)$ le nombre de ses zéros dont le module ne dépasse pas r; *déterminer asymptotiquement la fonction* $\varphi(r)$. Ce problème est distinct du problème de la détermination du *genre :* indépendamment du fait que le genre dépend du facteur exponentiel, et non pas seulement des facteurs primaires, il peut y avoir grand intérêt à remplacer cette notion du genre par la notion de l'ordre (XIX), que j'ai introduite et qui est généralement bien plus précise; mais surtout il est essentiel d'observer que la connaissance de l'ordre et du genre ne suffit pas à donner l'expression asymptotique de la fonction $\varphi(r)$; elle permet d'écrire seulement l'une des deux inégalités nécessaires; j'ai pu arriver au résultat complet, dans des cas étendus, par l'introduction de la notion de croissance régulière (XXII). Cette introduction revient au fond à faire précéder la recherche *quantitative* de la croissance, par la recherche *qualitative,* dont on ne s'était pas encore occupé.

Mais avant d'aborder ces divers problèmes, la première question à résoudre était la démonstration directe du théorème fondamental trouvé

par M. Picard en 1880 : *L'équation obtenue en égalant une fonction entière à une constante admet une infinité de racines, sauf peut-être pour une valeur particulière de la constante*. Il est clair, en effet, que dans le cas exceptionnel *unique*, ainsi signalé par M. Picard, on ne peut rien trouver relativement à $\varphi(r)$; il est donc essentiel de tenir compte de la possibilité de ce cas d'exception et, pour cela, il faut avoir du théorème une démonstration qui ne soit pas basée sur des considérations étrangères à la théorie.

J'ai été assez heureux pour obtenir une telle démonstration (**9**); l'on me permettra de citer les remarques dont la faisait suivre M. Picard, après l'avoir communiquée à l'Académie (*Comptes rendus*, 11 mai 1896) :

« Tous les géomètres admireront l'analyse si profonde que communique M. Borel. Bien des tentatives avaient été faites sans succès pour trouver, sans recourir à la théorie des fonctions elliptiques, une démonstration directe et élémentaire du théorème en question. M. Hadamard seul, à ma connaissance, avait fait un essai heureux, mais il avait dû se limiter à certaines classes de fonctions entières, comme on peut le voir dans son beau Mémoire couronné, il y a trois ans, par l'Académie. »

M. Picard émettait ensuite le vœu de voir ce premier résultat me conduire à d'autres : ce fut l'objet de mes Mémoires ultérieurs (**11**, **14**, **31**, **49**; XIX à XXIV).

IV. — Les séries divergentes.

Mes recherches sur les séries divergentes ont été inspirées par la lecture d'une phrase de Cauchy (Préface de l'*Analyse algébrique*) : « J'ai été *forcé d'admettre* quelques propositions qui paraîtront peut-être *un peu dures;* par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme... ». Cauchy n'a donc proscrit les séries divergentes que parce qu'il a jugé impossible de faire autrement, mais non sans regretter de priver l'Analyse d'un instrument précieux; Abel partageait ce sentiment, comme le montre la lecture de sa correspondance. Il était donc naturel de se demander si les progrès de l'Analyse ne rendraient pas facile ce qui aurait été difficile, sinon impossible, au temps d'Abel et de Cauchy : établir une théorie rigoureuse des séries divergentes, c'est-à-dire *faire correspondre à une série divergente un nombre déterminé, de telle manière que la substitution du nombre à la série donne des résultats exacts, au moins dans certains cas connus d'avance.*

Il est clair qu'une telle théorie ne peut s'appliquer qu'à certaines classes déterminées de séries divergentes; j'ai donné le nom de séries *sommables* à

celles dont ma méthode permet d'obtenir la somme. La théorie que j'avais esquissée (24) a été, dès sa publication, l'origine de nombreux travaux; plusieurs d'entre eux sont relatifs à la théorie du prolongement analytique de la série de Taylor, théorie que M. Hadamard avait le premier abordée avec le succès que l'on sait, et qui a pris, dans ces dernières années, un nouvel essor, auquel on voudra bien sans doute reconnaître que mes Mémoires n'ont pas été sans contribuer.

Mais, malgré les rapports qu'il y a entre la théorie des séries divergentes et celle du prolongement analytique, ces deux théories ne doivent pas être confondues; je l'ai montré bien nettement en faisant voir que la théorie des séries sommables peut s'appliquer à des séries de Taylor dont le rayon de convergence est nul. Ce résultat a été donné pour la première fois dans un Mémoire (29) auquel l'Académie a décerné le grand prix des Sciences mathématiques [1]; je me permettrai de citer le commencement et la fin de la partie du Rapport qui concerne mon Mémoire :

« L'auteur du Mémoire... est un géomètre qui a beaucoup réfléchi sur les principes fondamentaux de l'Analyse, et il aime à mettre en lumière les idées qui l'ont guidé. Aussi, en dehors de résultats positifs qui sont, comme on va voir, d'un grand intérêt, ce Mémoire contient encore des vues judicieuses et originales qui en rendent, dans maintes pages, la lecture attrayante, et l'indication de problèmes variés dont l'étude semble devoir être féconde....

» .... Nous croyons avoir suffisamment montré, par cette courte analyse, la haute valeur du Mémoire n° 3; la Commission est unanime à lui accorder le prix. »

Dans cet exposé sommaire de mes recherches, je n'ai pas indiqué les résultats, désirant éviter les redites et tenant à en donner un tableau complet dans la seconde Partie de cette Notice, où je les ai classés suivant l'ordre de matières généralement adopté dans la bibliographie et dans l'enseignement mathématiques; plusieurs paragraphes (V, VI, VIII, IX, XV, XXV, XXVIII, XXX à XXXIII) se rapportent d'ailleurs à des sujets auxquels il n'a été fait aucune allusion dans les pages précédentes.

[1] En 1898; la question mise au concours était : *Chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en Analyse les séries divergentes.* La Commission se composait de MM. Darboux, Jordan, Hermite; Picard et Poincaré, rapporteurs.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSUMÉ ANALYTIQUE DES RÉSULTATS.

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE.

V. — Le théorème de Fermat.

On sait quelle est l'importance de ce théorème, dû à Fermat : $x^p - x$ est divisible par p, quel que soit l'entier x, lorsque p est un nombre premier. J'ai démontré que *ce théorème est le seul qu'il faille adjoindre à la théorie élémentaire de la divisibilité des nombres entiers* pour pouvoir résoudre complètement la question suivante : Déterminer le plus grand commun diviseur à toutes les valeurs entières que prend un polynome à coefficients entiers (ou rationnels) pour des valeurs entières quelconques des variables. A ce point de vue le théorème de Fermat n'est susceptible d'aucune généralisation ni extension (40, 46).

VI. — La résolution numérique des équations.

Les deux Notes que j'ai publiées sur la résolution numérique des équations algébriques contiennent chacune un résultat analogue au précédent. L'une d'elles (39) est relative à la méthode d'approximation de Laguerre et a été inspirée par la lecture d'une Note jointe par M. Hermite au t. I des OEuvres de Laguerre. J'y fais voir que la méthode de Laguerre fournit la solution *complète* du problème suivant : Soient $f(x)$ un polynome de degré n, tel que l'équation obtenue en l'égalant à zéro ait *toutes ses racines réelles*, et a un nombre réel quelconque : *connaissant seulement les valeurs de* $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ *et le nombre* n, *déterminer un intervalle, le plus grand possible, comprenant* a *et dans lequel on soit assuré qu'il n'y a aucune racine de l'équation.*

Dans une autre Note (38), j'avais démontré une proposition tout à fait semblable relativement au théorème de Descartes qui fait connaître une limite supérieure du nombre des racines positives d'une équation algébrique entière. Ce théorème exprime *tout ce que l'on peut dire* relativement à la réalité des racines d'une telle équation, lorsque l'on connaît seulement les signes des coefficients non nuls.

VII. — L'approximation des nombres incommensurables.

J'ai été conduit, par de nombreuses questions d'Analyse (XIII, XXIX) à m'occuper de l'approximation des nombres incommensurables au moyen de nombres rationnels. Je laisse de côté quelques résultats généraux que j'ai obtenus à ce sujet (27), pour m'attacher surtout à l'extension des propositions bien connues de Liouville sur les propriétés arithmétiques des nombres algébriques.

Étant donné un nombre incommensurable α, réduit en fraction continue, soient a_n le $n^{ième}$ quotient incomplet, et $\varphi(n)$ le plus grand des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. A chaque nombre α correspond ainsi une fonction numérique déterminée $\varphi(n)$.

Une première remarque est la suivante : Si l'on considère une infinité dénombrable quelconque de nombres α, *il existe* une fonction $\Phi(n)$ qui croît plus vite que toutes les fonctions $\varphi(n)$ correspondant à ces nombres. En particulier (18), *tous les nombres α que l'on peut définir par un nombre limité d'équations différentielles algebriques à coefficients entiers* (les valeurs initiales étant rationnelles ou étant elles-mêmes des nombres α) *sont tels que les fonctions $\varphi(n)$ correspondantes croissent moins vite qu'une fonction déterminée $\Phi(n)$.*

Le problème de la détermination effective de la fonction $\Phi(n)$ paraît être au-dessus des ressources actuelles de l'Analyse ; j'ai dû me contenter de le poser ; mais le fait que cette fonction existe est en lui-même un résultat susceptible d'être utilisé, de même qu'il est souvent utile de savoir qu'un ensemble de nombres est limité supérieurement, bien que l'on ne connaisse pas sa limite supérieure.

Les considérations précédentes m'ont naturellement conduit à étudier ces fonctions $\Phi(n)$ pour les nombres transcendants les plus simples, ceux qui se rattachent au nombre e ; ces recherches font partie du groupe de celles qui ont été inspirées par le célèbre Mémoire de M. Hermite sur la fonction exponentielle.

Il y a avantage à s'occuper d'abord de l'approximation des nombres algébriques par des nombres algébriques de degré déterminé. On a ainsi le résultat suivant (19) : *Le nombre algébrique α étant donné, ainsi que l'entier m, si l'on détermine les coefficients (entiers) du polynome* $P(x)$, *de degré m de manière que* $P(\alpha)$ *soit inférieur à* ε, *la somme des valeurs absolues des coefficients de* $P(x)$ *est constamment supérieure à* $M\varepsilon^{-\mu}$, M *et* μ *étant des nombres fixes.*

L'énoncé précédent subsiste si l'on remplace le nombre algébrique α par le nombre *e*, avec cette importante modification cependant que μ, *au lieu d'être fixe, est défini par la relation* $\frac{k}{\mu} = \log\log\frac{1}{\varepsilon}$, *k* étant *une constante ne dépendant pas de m* (19). On déduit aisément de ce résultat la détermination d'une limite supérieure de $\varphi(n)$ pour les nombres algébriques que l'on obtient lorsque l'on adjoint *e* au domaine naturel de rationalité.

J'ai indiqué l'intérêt qu'il y aurait à étendre ces recherches à de nouvelles classes de nombres transcendants ; quelques résultats ont été obtenus, dans cette voie, par M. Carl Störmer [*Sur les logarithmes des nombres algébriques* (*Bulletin de la Société mathématique*; 1900)].

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE.

VIII. — Les séries semi-convergentes.

Lorsqu'une série n'est pas absolument convergente, on ne peut pas, en général, changer l'ordre des termes sans modifier la somme; il est cependant clair que cette somme n'est pas altérée par de petits changements, par exemple si l'on permute chaque terme de rang pair avec le terme suivant. Pour préciser cette remarque évidente, appelons *déplacement* du terme de rang *n* d'une série donnée la valeur absolue de la différence entre son rang *n* dans la série primitive et son rang dans la série transformée. On a alors la proposition suivante (35) : *Pour que la somme ne soit pas altérée, il suffit que le produit du terme de rang n par le déplacement maximum des termes dont le rang ne dépasse pas n tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.* On peut dire aussi : *il suffit que le produit du déplacement du terme de rang n, par la valeur absolue maximum des termes dont le rang n'est pas inférieur à n, tende vers zéro.* Mais *il ne suffit pas que le produit du terme*

de rang n par son déplacement tende vers zéro; ce dernier resultat était plus caché que les précédents.

IX. — Les ensembles mesurables.

Mes recherches sur les séries de fractions rationnelles (XIII) m'ont conduit à étudier les ensembles de points situés sur une droite; parmi tous les ensembles possibles, j'en ai distingué une catégorie déterminée à laquelle j'ai donné le nom d'*ensembles mesurables;* à chaque ensemble mesurable correspond un nombre bien déterminé qu'on appelle *sa mesure*. En renonçant ainsi à définir la mesure pour un ensemble quelconque, on constitue une théorie moins générale, c'est-à-dire s'appliquant à des cas moins étendus, mais plus précise dans les cas où elle s'applique (48).

La propriété dont je me suis le plus servi est celle-ci : *Tout ensemble dont la mesure n'est pas nulle renferme une infinité non dénombrable de points.*

Ce résultat est d'ailleurs une conséquence du théorème suivant, que j'avais obtenu antérieurement (27) : *Si l'on a sur un segment de droite une infinité d'intervalles dont la somme est inférieure à la longueur du segment, il y a une infinité non dénombrable de points du segment qui n'appartiennent à aucun des intervalles.*

On peut rattacher ce théorème à un lemme, qui ne paraîtra peut-être pas dépourvu d'intérêt en lui-même, et dont j'ai donné deux démonstrations tout à fait différentes (27, 48) : *Si l'on a sur un segment de droite une infinité d'intervalles tels que chaque point du segment soit* INTÉRIEUR *à l'un au moins d'entre eux, on peut déterminer un nombre limité d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et tels que tout point du segment soit intérieur à l'un d'eux.* Dans cet énoncé, il est *essentiel* de prendre le mot *intérieur* dans un sens étroit, c'est-à-dire de ne pas regarder les extrémités d'un intervalle comme des points intérieurs à cet intervalle.

X. — Les fonctions dont toutes les dérivées sont continues.

L'étude des séries de fractions rationnelles (XIII) m'a suggéré l'énoncé de diverses propositions sur les fonctions de variable réelle dont toutes les dérivées sont continues; j'ai démontré la plupart de ces propositions à l'aide d'une méthode nouvelle de résolution applicable à une classe étendue de systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, méthode entièrement distincte de celles qui sont basées sur la considération de déterminants infinis (27).

Parmi les résultats auxquels conduit très aisément cette méthode, je citerai le suivant : *On peut toujours déterminer une fonction de variable réelle x ayant des dérivées de tout ordre, ces dérivées ayant des valeurs quelconques données pour $x = 0$.* En particulier, *ces dérivées peuvent être telles que le développement de Mac Laurin diverge plus rapidement qu'un développement quelconque donné d'avance.*

Mais la proposition la plus importante que j'aie obtenue dans cet ordre d'idées me paraît être la suivante : *Toute fonction de variable réelle x admettant des dérivées de tout ordre dans un intervalle donné peut être mise sous la forme de la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier, ces séries étant telles que toutes leurs dérivées convergent uniformément et représentent par suite les dérivées de la fonction.*

J'ai étendu cette proposition aux fonctions de deux variables réelles par une analyse difficile, plus difficile peut-être que ne le comportait l'importance du résultat à obtenir (28); l'intérêt principal de cette démonstration me paraît résider dans l'application qui y est faite du théorème de Paul Du Bois-Reymond sur la croissance des fonctions, à la démonstration d'un résultat très précis. Depuis, M. Painlevé (*Comptes rendus*, 7 février 1898) a démontré par une méthode plus simple un résultat analogue pour les fonctions de n variables réelles dont toutes les dérivées sont continues : *une telle fonction peut être représentée par une série de polynomes dérivable terme à terme indéfiniment;* mais l'étude générale des séries de polynomes est bien peu avancée, d'où résulte une conséquence que M. Painlevé a bien voulu signaler (*loc. cit.*, p. 459) :

« Si ma démonstration est beaucoup plus simple et générale que celle de M. Borel, en revanche la démonstration de M. Borel va bien plus à fond sur un point très important. M. Borel montre, en effet, que l'on peut assujettir les coefficients des Π_n à des inégalités telles : 1° que la série (1) soit dérivable indéfiniment terme à terme (dès que ces inégalités sont vérifiées) et 2° que toute fonction $f(x, y)$ se laisse mettre sous la forme (1), où les inégalités en question sont vérifiées [1]. »

[1] M. Painlevé avait écrit, pour abréger, mon développement sous la forme

$$f(x, y) = \sum \Pi_n(x, y, \sin x, \cos x, \sin y, \cos y), \tag{1}$$

Π_n étant un polynome en $x, \ldots, \cos y$; mais ce polynome a une forme bien déterminée et très spéciale, ce qui en facilite l'étude.

XI. — La généralisation du prolongement analytique.

M. Painlevé a fait connaître aussi des développements en séries de polynomes pour les fonctions *analytiques* de variable réelle (*Comptes rendus*, 31 janvier 1898) : ces développements sont tels que leurs coefficients sont complètement déterminés par la connaissance des valeurs que prend, en un point, la fonction et ses dérivées : ils constituent ainsi une généralisation de la série de Taylor. M. Mittag-Leffler a donné peu de temps après, par une voie toute différente, un théorème sur les fonctions analytiques, sur lequel nous reviendrons plus loin (XIV, XVIII), mais qui, pour les variables réelles, ne diffère pas essentiellement de celui de M. Painlevé : leur caractère commun est de s'appliquer *aux fonctions analytiques, dans l'intervalle où elles sont régulières*. J'ai mis en évidence ce fait inattendu, que *les développements de M. Painlevé et de M. Mittag-Leffler s'appliquent aussi à une classe étendue de fonctions non analytiques* (33) ; il en est, d'ailleurs, de même de *tout autre développement en séries de polynomes ayant les mêmes propriétés fondamentales* (XVIII, 34).

On est ainsi amené à distinguer parmi les fonctions réelles non analytiques une classe nouvelle de fonctions auxquelles j'ai donné provisoirement [1] le nom de *fonctions* (M); *leur propriété essentielle est d'être complètement déterminées, dans tout leur intervalle d'existence, par la connaissance des valeurs qu'elles ont, ainsi que leurs dérivées, en un point quelconque de cet intervalle*. On ne connaissait jusqu'ici que les fonctions analytiques qui possèdent cette propriété; l'on savait seulement que les fonctions non analytiques ne sauraient toutes la posséder.

---

[1] La classe obtenue paraît être plus ou moins étendue suivant le choix que l'on fait parmi l'infinité de séries de polynomes possédant les propriétés fondamentales; il y a là un sujet de recherches que je n'ai pas encore eu le temps d'aborder; j'ai supposé que l'on prenait une *classe de séries* (XVIII) bien déterminée.

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE.

XII. — Généralisation de la notion de la fonction.

Les résultats qui viennent d'être rappelés sont intimement liés à mes recherches sur la notion de fonction de variable complexe. J'ai déjà indiqué (II) les idées générales qui m'ont guidé dans ces recherches; je réserve pour le prochain paragraphe (XIII) tout ce qui est relatif aux propriétés particulières des séries de fractions rationnelles, pour indiquer seulement ici les conséquences de ces propriétés au point de vue de la théorie générale des fonctions.

Remarquons d'abord que la définition donnée, il y a un instant, de la fonction (M) sur un segment de l'axe réel s'étend sans peine à un segment rectiligne quelconque situé dans le plan de la variable complexe z. Si deux tels segments ont un point commun, les fonctions (M) correspondantes seront dites le *prolongement* l'une de l'autre si elles sont égales en ce point, ainsi que toutes leurs dérivées.

Cela posé, considérons un ensemble de droites D, dense dans tout le plan [1], et une région simplement connexe S; supposons que, sur tout segment intérieur à S de chacune des droites D, on ait défini une fonction M et qu'en chaque point intérieur à S et situé sur plus d'une droite D les fonctions (M) correspondantes soient le prolongement l'une de l'autre: on dira que l'on a défini à l'intérieur de S, sur les droites D, une fonction (M) uniforme.

Il existe des fonctions (M) *uniformes qui ne sont analytiques en aucun point de leur domaine d'existence; il en est d'autres qui sont analytiques seulement dans une portion de ce domaine :* tel est le résultat fondamental qui

[1] Je dis qu'un ensemble de droites est dense dans tout le plan lorsque, étant donnés deux points arbitraires A et B du plan et un nombre positif quelconque ε, il existe une droite D de l'ensemble telle que la distance à D de chacun des points A et B soit inférieure à ε.

permet d'affirmer que la théorie des fonctions (M) constitue bien une véritable généralisation de la théorie du prolongement analytique.

Je laisse de côté une discussion relative à la notion de l'uniformité, que j'ai développée d'une manière détaillée dans un récent Mémoire (33) et dont les résultats concordent avec les idées exposées plus haut (II). Enfin, l'extension des théorèmes de Cauchy, relatifs à l'intégration le long d'un contour, va être indiquée à propos des séries de fractions rationnelles (XIII); et les relations de cette théorie avec les recherches sur les séries divergentes seront exposées un peu plus loin (XVIII).

XIII. — Les séries de fractions rationnelles.

Mes recherches sur les séries de fractions rationnelles sont intimement liées avec la généralisation de la théorie des fonctions analytiques; elles m'ont cependant conduit à des résultats tout à fait indépendants de cette généralisation; ce sont ces résultats que je vais exposer tout d'abord, en restant au point de vue de Weierstrass.

Le plus important est le suivant que je vais énoncer en me bornant, pour plus de netteté, à un cas particulier :

Soit

$$(\alpha) \qquad f(z) = \sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

une série de fractions rationnelles, les entiers positifs m_n étant inférieurs à un nombre donné m; si les numérateurs A_n sont assez petits, on peut affirmer que la fonction analytique $f(z)$, définie par la série dans une région du plan où elle converge uniformément, admet effectivement comme points singuliers les points a_n, sans qu'il soit nécessaire de rien savoir sur la distribution de ces points dans le plan.

Lorsque je dis que les A_n sont *assez petits*, il faut entendre par là que leurs modules vérifient des inégalités bien déterminées que j'ai données explicitement dans mes Mémoires (29, 33) et qui ne dépendent que de l'entier m. On peut, d'ailleurs, remplacer ces inégalités par d'autres, indépendantes de m; il est inutile alors de connaître ce nombre pour pouvoir appliquer les conclusions de l'énoncé; il suffit de savoir qu'il existe un nombre m auquel tous les m_n sont inférieurs. Le théorème précédent s'étend aussi au cas où m_n est une fonction croissante de n, à condition que l'on sache que cette fonction croissante croît moins vite qu'une fonc-

tion connue; les inégalités doivent être modifiées en conséquence. Enfin, on peut étendre ces divers résultats à des séries de fractions rationnelles non décomposées en éléments simples, et cette extension est effective, c'est-à-dire s'applique à des séries auxquelles le théorème ne s'appliquerait pas directement, si l'on décomposait en éléments simples les divers termes et si l'on séparait les fractions ainsi obtenues (33).

Mais je tiens surtout à attirer l'attention sur le fait que *nulle hypothèse n'est faite sur la distribution dans le plan des pôles des diverses fractions rationnelles*. Dès lors, les méthodes indiquées par M. Poincaré ([1]) et par M. Goursat ([2]) et appliquées ensuite par M. Lerch et par M. Pringsheim pour le cas où ces pôles ont une distribution particulière, ne sont ici d'aucune utilité; dans ma Thèse, j'avais indiqué seulement l'insuffisance d'une démonstration donnée par M. Pringsheim pour un cas particulier du théorème précédent; c'est seulement plus tard que mes recherches sur les séries divergentes m'ont conduit à une démonstration rigoureuse de ce théorème.

Il n'est pas inutile d'observer que, si l'on ne suppose pas que les numérateurs d'une série de fractions rationnelles satisfont à certaines inégalités, il résulte des travaux de Weierstrass, de M. Poincaré, de M. Appell, de M. Runge, de M. Painlevé, qu'*il peut n'y avoir aucun rapport entre les singularités des termes de la série et celles de la fonction analytique qu'elle définit dans une région déterminée du plan* (elle peut définir des fonctions différentes dans des régions différentes).

Certaines hypothèses d'inégalités sont donc *nécessaires* pour que l'on puisse affirmer que les points singuliers de la série sont réellement singuliers pour la fonction; les inégalités que j'introduis ne sont donc pas arbitraires; *on ne peut se passer d'inégalités de cette nature*. Il y aura seulement lieu de rechercher si l'on ne peut pas remplacer celles que je donne par d'autres qui soient plus larges; mais, quelle que puisse être l'importance pratique des résultats à obtenir dans cette voie, le théorème général n'en sera pas essentiellement modifié; au contraire, il y a une différence essentielle, au point de vue de la généralité, entre les recherches où l'on introduit des hypothèses restrictives sur la distribution dans le plan des pôles des termes de la série, et celles où l'on n'introduit aucune hypothèse de cette nature.

([1]) *Acta Societatis fennicæ*, t. XIII, 1881.

([2]) *Comptes rendus*, t. XCIX, p. 715, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1887.

D'ailleurs, grâce à l'emploi de la méthode dont j'ai rappelé le principe (II), cette grande généralité se trouve obtenue sans effort; ce n'est pas par la discussion successive de toutes les hypothèses possibles sur la distribution des pôles que l'on arrive à épuiser tous les cas possibles; c'est, au contraire, parce qu'on ne fait aucune hypothèse que tous les cas se trouvent traités d'un seul coup ([1]).

Avant d'obtenir les résultats précédents, j'avais donné un théorème plus particulier, bien que la classe de séries à laquelle il s'applique soit, en un certain sens, plus étendue, car les inégalités auxquelles sont assujettis les A_n sont moins restrictives; mais, d'autre part, je supposais les m_n tous égaux. Dans cette hypothèse, *si les* A_n *sont tels que la série* $\sum A_n Z^n$ *converge quel que soit* Z *et si la série* $f(z)$ *est nulle dans une région ne renfermant aucun point* a_n, *elle est nulle dans toute région analogue.*

Le principal intérêt de cette proposition me paraît résider dans la simplicité de sa démonstration, fondée sur la considération directe du développement de Taylor de $f(z)$ (27).

Voici maintenant quelques théorèmes relatifs à la manière dont se comportent les séries de fractions rationnelles dans les régions du plan où les pôles des termes de la série forment un ensemble partout dense. C'est là un sujet que j'ai été le premier à aborder et dans lequel j'ai été assez heureux pour obtenir plusieurs propositions à la fois fort simples et fort générales.

J'ai déjà indiqué la *nécessité* d'assujettir les numérateurs des fractions rationnelles à certaines inégalités; ces inégalités varient suivant la nature des problèmes : je leur ai toujours donné une forme bien déterminée; pour abréger le langage, je me contenterai, dans les énoncés que je rappellerai ici, de dire que les numérateurs sont *assez petits*. Quant aux zéros a_n des dénominateurs, *leur distribution est toujours supposée arbitraire* : elle n'influe en rien sur les inégalités.

Cela posé, la première des propositions que j'ai établies est la suivante : *les numérateurs étant assez petits, il existe une infinité de courbes de continuité* C, *c'est-à-dire de courbes sur lesquelles la série converge uniformément ainsi que toutes ses dérivées, qui représentent par suite les dérivées de la fonction.*

Relativement à l'infinité de ces courbes de continuité, on peut dire qu'il

([1]) C'est par une méthode basée sur le même principe que j'ai pu (III) démontrer dans toute sa généralité le théorème de M. Picard; la difficulté provenant du nombre transfini des types de croissance a été indirectement évitée.

existe des courbes C aussi voisines que l'on veut d'une courbe donnée d'avance; de plus, *étant donné un système quelconque de courbes, dépendant d'un paramètre continu, il existe dans tout intervalle une infinité non dénombrable de valeurs du paramètre telles que les courbes correspondantes soient des courbes* C.

Le seul cas d'exception serait celui où les courbes du système passeraient par des points fixes limites de points a_n; *mais il est possible de trouver dans toute région du plan une infinité non dénombrable de points pouvant être pris comme points fixes sans que le théorème cesse d'avoir lieu; en tous ces points la fonction* $f(z)$ *définie par la série a la même dérivée sur toutes les courbes* C *qui y passent, c'est-à-dire dans une infinité non dénombrable de directions dans tout angle.*

La série $f(z)$ peut être intégrée terme à terme le long des courbes de continuité; *l'intégrale, le long d'un contour fermé, est égale au produit de* $2i\pi$ *par la somme des résidus des termes de la série par rapport aux pôles* a_n *intérieurs au contour.*

J'ai démontré d'abord ces propositions pour les séries (α) et les ai ensuite étendues (33) aux séries non décomposées en éléments simples, les numérateurs étant toujours supposés assez petits. Dans ce dernier cas, il peut arriver que la série, dont les termes successifs sont les résidus d'un pôle déterminé a_n, par rapport aux termes successifs de la série de fractions rationnelles, *soit divergente;* mais, la série ayant pour terme de rang n la somme des résidus de tous les pôles intérieurs au contour C, par rapport au terme de rang n de la série de fractions, *est toujours convergente.* J'ai été amené, par l'étude de cette circonstance, à des conséquences assez curieuses, relativement à l'existence *individuelle* des pôles, dans le cas où les fractions rationnelles ne sont pas décomposées en éléments simples. Mais il serait trop long d'indiquer ici ces conséquences, dont je me propose d'ailleurs de poursuivre l'étude.

En nous bornant à la série (α), voici un résultat qui met bien nettement en évidence que, si les numérateurs A_n sont assez petits, les pôles ont bien une existence individuelle, c'est-à-dire se distinguent nettement, comme points singuliers, des points limites de pôles. Désignons par m la plus grande des valeurs que prennent les m_n et par a un point quelconque du plan; si $a = a_n$, $m = m_n$, on dira que A_n est le *numérateur correspondant* au point a; si le point a ne coïncide avec aucun point a_n, ou coïncide avec des points a_n tels que l'exposant m_n correspondant soit inférieur à m, on dira que le numérateur correspondant au point a est zéro.

On a, dès lors, le théorème suivant :

Lorsque z tend vers a suivant un chemin quelconque, sur lequel la série est convergente, si le produit $(z-a)^m f(z)$ tend vers une limite, cette limite est égale au numérateur correspondant; de plus, il existe une infinité de chemins, de longueur finie, aboutissant au point a, et tels que ce produit tende effectivement vers une limite lorsque z suit ces chemins (21, 33).

XIV. — L'étude d'une fonction donnée par une série de Taylor.

Le problème de la détermination des singularités d'une fonction analytique au moyen de l'étude de son développement de Taylor a été abordé pour la première fois, d'une manière directe, et sous sa forme générale, par M. Hadamard, dans sa remarquable Thèse. C'est en me servant des déterminants de M. Hadamard que j'ai obtenu le résultat suivant (36) :

Si une série de Taylor, à coefficients entiers, représente une fonction n'admettant à l'intérieur du cercle de rayon UN *et sur ce cercle, aucune autre singularité que des pôles, elle est égale au quotient de deux polynomes à coefficients entiers.*

En particulier, *une fonction méromorphe ne peut pas être représentée par une série de Taylor à coefficients entiers.* Les séries à coefficients rationnels peuvent d'ailleurs, dans certains cas (2), être ramenées aux séries à coefficients entiers.

Plus récemment, M. Hadamard a donné un théorème fort intéressant établissant un lien entre les singularités de la série $f(z) = \sum a_n b_n z^n$ et celles des séries $\varphi(z) = \sum a_n z^n$ et $\psi(z) = \sum b_n z^n$; ce théorème consiste en ce que la première série n'admet pas d'autres singularités que les points $\alpha\beta$, en désignant par α et β deux points singuliers quelconques des deux dernières.

J'ai donné de ce théorème une démonstration très simple qui m'a permis de le compléter sur plusieurs points (42) :

Le théorème s'étend aux singularités des diverses branches des fonctions non uniformes; seulement, dans ce cas, en plus des points singuliers $\alpha\beta$, certaines branches de la fonction $f(z)$ peuvent admettre le point singulier $z = 0$.

La nature du point singulier $\alpha\beta$ ne dépend que de la nature des points

singuliers α *et* β; *si les fonctions données* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *sont uniformes au voisinage de ces points, il en est de même de la fonction* $f(z)$ *au voisinage de* $\alpha\beta$.

En particulier, *si* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *sont uniformes dans tout le plan et à singularités ponctuelles, il en est de même pour* $f(z)$; *si* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *sont méromorphes,* $f(z)$ *est aussi méromorphe.*

Mais *il pourrait arriver que les fonctions* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *soient uniformes dans tout leur domaine d'existence, sans qu'il en soit de même de* $f(z)$; j'en ai donné un exemple très simple; ce résultat doit être rattaché aux idées développées plus haut sur l'insuffisance de la définition de l'uniformité pour une fonction qui possède des lignes singulières essentielles.

Enfin, l'étude des singularités les plus simples montre que, en général, le point $\alpha\beta$ est *effectivement* un point singulier pour $f(z)$; il y a cependant un important cas d'exception possible : *c'est celui où* $\alpha\beta$ *est égal à* $\alpha'\beta'$, α' *et* β' *étant aussi deux points singuliers de* $\varphi(z)$ *et de* $\psi(z)$.

Indépendamment de ces compléments aux importants travaux de M. Hadamard, j'ai trouvé, dans mes recherches sur les séries divergentes, une méthode nouvelle pour aborder l'étude de la série de Taylor. Cette méthode repose essentiellement sur la considération de la *fonction entière associée* à une série de Taylor donnée; le premier des résultats auxquels j'ai été ainsi conduit (25) est une généralisation d'un théorème de M. Hadamard sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes; depuis, M. Fabry a généralisé à son tour mon théorème; je n'y insiste pas.

Mais le résultat auquel j'attache le plus de prix est le suivant : *une série de Taylor admet, en général, son cercle de convergence comme coupure* (12, 25, 32). Cette proposition était regardée comme certaine par tous ceux qui s'occupent de ces sujets. M. Pringsheim l'avait même énoncée; mais la difficulté principale était d'en préciser le sens avant d'en donner la démonstration. Le point de vue auquel je me suis placé a été généralement adopté depuis; M. Fabry et M. Leau ont donné de la même proposition des démonstrations différentes, mais basées sur le même principe. Ce principe est le suivant : on peut partager la série en une infinité de groupes successifs de termes et, à chaque groupe, faire correspondre un point du cercle de convergence *qui ne dépend que des coefficients de ce groupe;* ces points forment un ensemble E; tout point de l'ensemble dérivé E' est un point singulier. Les applications de ce principe ne sont

d'ailleurs pas limitées aux cas où le cercle de convergence est une coupure; M. Leau a fait voir que son emploi permet d'obtenir très simplement d'importants résultats.

A un autre point de vue, j'ai donné une méthode pour étudier les singularités d'une série de Taylor, lorsque l'on considère le coefficient a_m de z^m comme une fonction analytique de son rang m; *les singularités de la série ne dépendent que de la manière dont se comporte cette fonction analytique, à l'infini, dans la direction des m réels et positifs* (16); mais ces indications auraient à être développées; elles sont en connexion étroite avec mes recherches sur le problème général de l'interpolation (XV).

Enfin, la théorie des séries divergentes m'a conduit à une méthode pour déduire de la série de Taylor une expression analytique représentant la fonction analytique définie par la série dans une région plus étendue que le cercle de convergence, le polygone de sommabilité (XVI). Le caractère essentiel de cette expression analytique est de ne dépendre que de la série, et nullement des points singuliers (inconnus) de la fonction; la région de sommabilité seule en dépend, mais elle dépasse le cercle en tout point non singulier. Le beau théorème récemment trouvé par M. Mittag-Leffler et sur lequel j'aurai à revenir (XVIII) peut être considéré comme une généralisation de ce résultat, ainsi que M. Mittag-Leffler a bien voulu le signaler (*Stokes Commemoration*, p. 6; *Acta mathematica*, t. XXIV, p. 243).

XV. — Le problème de l'interpolation.

Si l'on désigne par $\varphi(z)$ un polynome admettant pour zéros les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la formule de Lagrange

$$f(z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m \varphi(z)}{(z - a_m)\varphi'(a_m)}$$

fait connaître le polynome $f(z)$ de degré $n - 1$ qui, pour $z = a_m$, prend la valeur b_m. L'extension de cette formule, au cas où le nombre des a_m est infini, ne va pas sans quelque difficulté, car la somme devient une série qui peut être divergente : j'ai montré (29) que, *parmi les fonctions entières* $\varphi(z)$ *qui admettent les zéros donnés, il est toujours possible d'en choisir une, telle que la série soit convergente : la formule de Lagrange s'applique alors sans modification*. Ce choix peut d'ailleurs être fait d'une infinité de manières et l'étude des relations qu'ont entre elles les diverses solutions obtenues m'a conduit à la découverte d'un principe très général.

Appelons, pour abréger, *problème d'interpolation* tout problème qui consiste à déterminer une fonction à l'aide d'une infinité dénombrable de conditions : tout problème d'interpolation est indéterminé; *on peut le rendre déterminé en imposant à la fonction inconnue des conditions supplémentaires d'inégalités, mais dans le cas seulement où les données elles-mêmes vérifient des inégalités convenables* (13). Ce principe m'a été utile dans mes recherches sur les séries divergentes et, en particulier, dans celles qui ont rapport aux séries de Stieltjes (XVII).

SÉRIES DIVERGENTES.

XVI. — Propriétés générales des séries sommables.

J'ai déjà indiqué (IV) les idées qui m'ont guidé dans mes recherches sur les séries divergentes, je vais me borner à résumer ici les résultats principaux de ces recherches.

Étant donnée une série divergente s, on peut lui faire correspondre la série obtenue en multipliant le terme de rang $n+1$ par $\frac{a^n}{n!}$. Bornons-nous au cas où la série ainsi obtenue représente une fonction entière de a; c'est la *fonction entière associée* à la série proposée; désignons-la par $u(a)$; la série s est dite *absolument sommable* si les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a}|u^{(\lambda)}(a)|\,da$$

ont toutes un sens, λ étant un indice de dérivation quelconque; la somme s est d'ailleurs définie par la relation

$$s=\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da.$$

Cette définition coïncide avec la définition habituelle lorsque la série s est convergente; de plus, *on peut effectuer, sur les séries absolument sommables, toutes les opérations qui sont légitimes sur les séries convergentes,* sauf celle qui consiste à déplacer *une infinité de termes;* la nécessité de cette restriction est évidente si l'on se reporte à un résultat précédemment rappelé (VIII).

La théorie peut s'étendre à certains cas où $u(a)$ n'est pas une fonction entière; les propriétés fondamentales subsistent (29).

Dans le cas où la série proposée est une série de Taylor à rayon de convergence fini, la région de sommabilité absolue se compose d'un polygone obtenu comme il suit : *on élève en chaque point singulier la perpendiculaire à la droite qui joint ce point à l'origine et l'on supprime la portion du plan située du côté de cette droite qui ne renferme pas l'origine*; en procédant ainsi pour tous les points singuliers, la portion du plan restante est le *polygone de sommabilité*.

La région ainsi définie *dépasse le cercle de convergence en tout point non singulier*, d'où une méthode simple pour rechercher les points singuliers situés sur ce cercle.

La méthode qui vient d'être exposée est la méthode de sommation exponentielle simple; elle est susceptible de très nombreuses généralisations, sur lesquelles je n'insiste pas; quant aux applications de la théorie à l'étude des intégrales de certaines équations différentielles, il en sera question plus loin (XXVII).

XVII. — Les séries de Stieltjes.

Dans un Mémoire bien connu, Stieltjes avait étudié les relations entre certaines séries de Taylor toujours divergentes et des classes déterminées de fractions continues et d'intégrales définies. Mais les séries auxquelles s'applique sa méthode ne donnent pas nécessairement, lorsqu'on les combine par multiplication, ou même par soustraction, des séries de même nature. J'ai pu, guidé par les idées sur l'interpolation rappelées plus haut (XV), rendre la théorie applicable à une classe bien plus étendue de séries, auxquelles j'ai donné le nom de *séries de Stieltjes* (29). Grâce à cette extension, *la somme, la différence, le produit de deux séries de Stieltjes, la dérivée d'une série de Stieltjes, sont des séries de Stieltjes*. Cette généralisation était indispensable pour que les applications de la théorie fussent possibles, notamment les applications aux équations différentielles (XXVIII).

XVIII. — Généralisations diverses.

En utilisant l'intégrale de Cauchy pour démontrer certaines propriétés des séries divergentes sommables, j'ai fait voir que la même méthode s'appliquerait dans des cas bien plus généraux ; toute expression analy-

lytique de la fraction simple $\frac{1}{1-z}$ permet d'obtenir une expression analytique d'une fonction quelconque $f(z)$; de plus, *si l'expression analytique de la fraction simple est linéaire par rapport aux puissances de* z, *l'expression analytique obtenue pour* $f(z)$ *ne dépend que des valeurs de* $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., *c'est-à-dire des coefficients du développement de Taylor : on a donc un procédé de sommation de ce développement, procédé qui fournira généralement une expression valable dans certaines régions où le développement diverge* (29).

Cette remarque m'a conduit à une démonstration très simple (30) d'un théorème bien connu de M. Mittag-Leffler, relatif à la possibilité de transformer toute série de Taylor en une série de polynomes convergeant dans toute l'étoile correspondant au point $z = 0$, c'est-à-dire dans la région obtenue en supprimant du plan tous les points, tels que le segment rectiligne qui les joint à l'origine renferme au moins un point singulier.

J'ai été ainsi amené à esquisser une théorie des séries de polynomes, en me plaçant au point de vue suivant : étant données deux séries de polynomes, considérons le $n^{\text{ième}}$ terme de chaque série, et le rapport des coefficients de x^k dans ces deux polynomes; *les deux séries sont rangées dans la même classe lorsque ce rapport est indépendant de* n. On avait étudié jusqu'ici des catégories de séries de polynomes telles que ce rapport soit *indépendant de* k; je crois que, dans beaucoup de questions, ma classification est préférable.

J'ai étudié, en particulier, les classes de séries *à région de convergence étoilée*, qui sont une généralisation des séries de M. Mittag-Leffler. J'ai déjà indiqué (XI, XII) certaines propriétés de ces classes, qui interviennent dans la généralisation de la notion de fonction. Voici maintenant un résultat indépendant de cette généralisation :

Dans toute classe de séries de polynomes à région de convergence étoilée, il y a des séries qui convergent dans un angle ayant son sommet à l'origine et qui définissent des fonctions $f(z)$ *analytiques dans cet angle et admettant l'origine comme point singulier; lorsque* z *tend vers zéro à l'intérieur de l'angle, les fonctions* $f(z)$ *et leurs dérivées tendent vers des limites qui sont égales aux valeurs que prennent, pour* $z = 0$, *les séries correspondantes et leurs dérivées. La série de polynomes qui représente* $f(z)$ *s'obtient d'ailleurs au moyen de la série de Taylor divergente qui correspond aux éléments* $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., *absolument comme si cette série de Taylor était convergente.*

FONCTIONS ENTIÈRES ET FONCTIONS MÉROMORPHES.

XIX. — Compléments aux résultats antérieurs.

La théorie des fonctions entières date de la découverte par Weierstrass de la décomposition en facteurs primaires ; dans le cas général, Weierstrass prend, pour exposant de e, dans le $n^{\text{ième}}$ facteur primaire, un polynome de degré n ; j'ai remarqué que *l'on peut prendre le degré égal au plus grand entier contenu dans* $\log n$, et la simplification ainsi obtenue m'a rendu de grands services (31).

Le premier résultat important dans la théorie des fonctions entières, après la découverte de Weierstrass, fut le théorème de M. Picard ; j'ai déjà signalé (III) quel intérêt il y avait eu à en obtenir une démonstration directe (9). Vinrent ensuite les recherches de Laguerre ; j'ai démontré (49) plusieurs résultats que Laguerre avait seulement énoncés, ou dont il n'avait publié qu'une démonstration insuffisante ; parmi ces résultats, le plus important est le suivant : *si une fonction réelle de genre fini* p *ne possède que* q *racines imaginaires, sa dérivée est aussi de genre* p *et a au plus* $p+q$ *racines imaginaires.*

Mais les premiers résultats généraux sur la relation entre le genre d'une fonction entière et la manière dont elle se comporte à l'infini sont dus, comme on le sait, à M. Poincaré. J'ai été amené à reprendre les théorèmes de M. Poincaré afin de leur donner un énoncé plus précis, par l'introduction, à la place du *genre* de Laguerre, du nombre que j'ai appelé l'*ordre* [1]. J'ai précisé de même les beaux théorèmes de M. Hadamard, qui sont, en quelque sorte, la réciproque de ceux de M. Poincaré. Mais ces divers compléments, bien que me paraissant pouvoir être très utiles dans les applications, ne renferment rien d'essentiellement nouveau. Aussi me paraît-il inutile d'énoncer en détail les divers théorèmes auxquels on est ainsi conduit ; je préfère insister sur ceux que j'ai obtenus par l'application de méthodes nouvelles.

---

[1] L'ordre peut être considéré comme défini par les inégalités que je rappelle plus loin, et dans lesquelles il est désigné par ρ (XXII).

XX. — Les applications des inégalités fondamentales.

Dans bien des recherches, il est nécessaire de connaître des inégalités auxquelles satisfont le maximum et le minimum du module d'une fonction entière et de ses dérivées, lorsque le module r de la variable z augmente indéfiniment.

Lorsque l'*ordre* de la fonction est donné, une limite supérieure du maximum de son module est fournie par le théorème de M. Poincaré; quant au minimum, M. Hadamard a indiqué que l'on pouvait en trouver une expression valable *pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment;* enfin, j'ai montré que, connaissant le module maximum de la fonction, on peut trouver une limite supérieure du module de ses dérivées, *sauf peut-être sur certains cercles.*

Voici maintenant une remarque qui est *essentielle* pour les applications : soit dans le théorème de M. Hadamard, soit dans celui qui donne la relation entre le module de la fonction et celui de sa dérivée (XXI), on est amené à exclure des valeurs de r, valeurs qui peuvent être en nombre infini; mais *les valeurs exclues, parmi les valeurs de r inférieures à* R, *peuvent être renfermées dans des intervalles tels que le rapport à* R *de leur longueur totale tende vers zéro, lorsque* R *croît indéfiniment.* Dès lors, si l'on considère *simultanément* un nombre quelconque de fonctions et leurs dérivées, on est certain qu'il existe une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment et telles que les deux théorèmes précédents puissent être appliqués, pour ces valeurs de r, à toutes les fonctions considérées.

XXI. — Les fonctions d'ordre infini.

La principale difficulté de l'étude des fonctions entières d'ordre infini est due à la multiplicité des modes de croissance; il n'est pas possible de ranger ces modes dans des catégories déterminées, même en nombre indéfini; il est dès lors nécessaire, pour obtenir des résultats généraux, de ne faire aucune hypothèse sur la manière dont croissent les fonctions que l'on considère, et de comparer cependant entre eux ces divers modes de croissance (*Cf.* p. 21).

Dans ce but, j'ai donné une définition précise de ce que j'ai appelé l'*ordre de grandeur* d'une fonction positive croissante : *deux telles fonctions sont dites du même ordre de grandeur lorsque le rapport de leurs logarithmes*

tend vers l'unité lorsque la variable augmente indéfiniment. J'ai d'ailleurs insisté sur le caractère arbitraire de cette définition : ce sont les résultats auxquels elle conduit qui en justifient l'introduction.

Il y a d'ailleurs avantage à élargir un peu la définition et à dire encore que deux fonctions sont du même ordre de grandeur, dans le cas où la condition énoncée n'est remplie qu'après l'exclusion de certains intervalles, à condition toutefois que ces intervalles satisfassent à la condition rappelée à la page précédente.

On a dès lors la proposition fondamentale suivante :

Soit $M(r)$ *le module maximum d'une fonction entière* $f(z)$ *pour* $|z| = r$ *et* $\mathfrak{M}(r)$ *la fonction positive obtenue en remplaçant dans le développement de* $f(z)$ *chaque terme par son module : les deux fonctions* $M(r)$ *et* $\mathfrak{M}(r)$ *sont du même ordre de grandeur.* On en conclut aisément que, *si l'on désigne par* $M_1(r)$ *le module maximum de la dérivée* $f'(z)$, *pour* $|z| = r$, *les deux fonctions* $M(r)$ *et* $M_1(r)$ *sont du même ordre de grandeur.*

Indépendamment de leur intérêt propre, ces propositions permettent d'étendre aux fonctions entières une propriété bien connue des polynomes ; le théorème que l'on obtient est le suivant :

Soient $G_1(z), \ldots, G_n(z)$, $H_1(z), \ldots, H_n(z)$ *des fonctions entières telles que le module maximum pour* $|z| = r$ *de* $G_i(z)$ *soit inférieur à* $e^{\mu(r)}$ *et que celui de* $H_k(z) - H_j(z)$ *soit supérieur à* $[\mu(r)]^2$, *quels que soient* i, k, j ; $[\mu(r)$ *est quelconque*] ; *l'identité*

$$G_1(z)e^{H_1(z)} + G_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + G_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne dès lors nécessairement les identités

$$G_1(z) = G_2(z) = \ldots = G_n(z) = 0.$$

Cette proposition peut être considérée comme la généralisation la plus étendue des théorèmes de M. Picard sur les fonctions entières ; on en déduit aisément un grand nombre de propositions particulières qu'il est inutile d'énoncer ici ; leur but commun est de contribuer à *la détermination de la fréquence asymptotique des zéros d'une fonction entière, au moyen de l'ordre de grandeur de la fonction.*

XXII. — Les fonctions à croissance régulière.

Bien que les propositions qui viennent d'être rappelées aient été autrement difficiles à obtenir que celles dont je vais maintenant parler, j'y attache moins de prix, parce qu'elles me paraissent plus éloignées des applications; je regarderais même les efforts qu'elles m'ont coûté comme hors de proportion avec le résultat, s'ils ne m'avaient suggéré des idées et des méthodes grâce auxquelles la théorie des fonctions à croissance régulière a pu être constituée sans difficulté.

Pour montrer nettement en quoi consiste cette théorie nouvelle, il est nécessaire de rappeler les résultats de M. Poincaré et de M. Hadamard pour les fonctions de genre fini; je les énoncerai sous la forme précise qu'ils prennent par l'introduction de l'ordre ρ au lieu du genre (XIX); de plus, je supposerai essentiellement que ρ n'est pas entier, afin d'éviter le cas d'exception de M. Picard.

Désignons par $f(z)$ la fonction entière étudiée, par $M(r)$ le maximum de son module pour $|z| = r$ et par r_n le module de son $n^{\text{ième}}$ zéro, les zéros étant rangés de manière que leurs modules ne décroissent pas.

Le théorème de M. Poincaré s'énonce alors ainsi :

Si l'on a, quel que soit le nombre positif ε,

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}, \tag{1}$$

au moins pour n assez grand, on a aussi

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \tag{2}$$

au moins pour r assez grand.

Le théorème de M. Hadamard consiste en ce que :

Réciproquement, si l'inégalité (2) *est vérifiée quel que soit* ε, *lorsque r est assez grand, il en est de même de l'inégalité* (1) *lorsque n est assez grand.*

En combinant ces deux théorèmes, on voit que si les deux expressions

$$\frac{\log n}{\log r_n} \quad \text{et} \quad \frac{\log \log M(r)}{\log r} \tag{3}$$

tendent chacune vers une limite lorsque n ou r augmente indéfiniment, *les deux limites ainsi définies sont égales.* Mais si l'une au moins des deux

expressions n'a pas de limite déterminée, on peut seulement affirmer l'égalité de leurs *plus grandes limites*, suivant l'expression de Cauchy; ce qui est un résultat bien moins précis.

Le résultat fondamental que j'ai obtenu est le suivant : *si l'une des expressions* (3) *tend vers une limite, il en est de même de l'autre;* dans ce cas la fonction $f(z)$ est dite *à croissance régulière* et l'on a *l'expression asymptotique précise du module de ses zéros, en fonction de leur rang n.*

Considérons, par exemple, l'équation

$$P(z, \cos\sqrt{z}, \cos\sqrt{-z}) = 0,$$

P étant un polynome quelconque à trois variables; si l'on désigne par n^{α_n} le module de la $n^{\text{ième}}$ racine de cette équation, *nous pouvons affirmer que* α_n *tend vers* 2 *lorsque* n *augmente indéfiniment;* on savait seulement que, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, α_n finit par être supérieur à $2-\varepsilon$ et prend, de plus, une infinité de valeurs inférieures à $2+\varepsilon$, le cas où α_n prendrait aussi une infinité de valeurs supérieures à $2+\varepsilon$ n'étant exclu pour aucune valeur de ε.

Toutes les fonctions entières rencontrées jusqu'ici en Analyse sont des fonctions à croissance régulière; lorsque la théorie précédente aura été étendue aux fonctions d'ordre infini, et aux fonctions d'ordre fini entier [1], elle sera pratiquement tout à fait générale, quoique théoriquement très particulière.

XXIII. — Les fonctions à croissance irrégulière.

Aussi n'ai-je pas cru devoir développer beaucoup mes recherches sur *les fonctions à croissance irrégulière;* je me suis contenté de démontrer l'existence de ces fonctions et d'en énoncer quelques propriétés, dans le seul but de mettre nettement en évidence combien il est avantageux d'étudier à part les fonctions à croissance régulière.

On peut déterminer une fonction entière $\varpi(x)$, *positive ainsi que toutes ses dérivées pour toutes les valeurs de la variable réelle positive* x *et telle de plus qu'il existe des valeurs de* x *aussi grandes que l'on veut pour lesquelles* $\varpi(x)$ *soit inférieure à* e^x *et aussi des valeurs de* x *aussi grandes que l'on veut pour lesquelles* $\varpi(x)$ *soit supérieure à* e^{x^2}.

[1] Cette double extension ne paraît pas d'ailleurs devoir présenter des difficultés sérieuses; il y aura seulement lieu de tenir compte du cas d'exception de M. Picard.

La fonction $\varpi(x)$ est un type caractéristique de fonction à croissance irrégulière ; on pourrait varier les exemples à l'infini, mais les propriétés de ces fonctions paraissent plus compliquées qu'intéressantes. Bornons-nous à la fonction $\varpi(x)$ dont je viens d'énoncer la propriété essentielle : il s'agit d'ailleurs d'une fonction bien déterminée parmi toutes celles qui possèdent cette propriété (29, 49). Désignons par n^{α_n} le module de la $n^{\text{ième}}$ racine de l'équation obtenue en égalant $\varpi(x)$ à un polynome quelconque; *le nombre α_n prend une infinité de valeurs aussi voisines que l'on veut de 1 et une infinité de valeurs aussi voisines que l'on veut de $\frac{1}{2}$; ce fait n'est d'ailleurs nullement incompatible avec l'hypothèse que n^{α_n} croît en même temps que n.*

J'ai indiqué aussi des propriétés curieuses des fonctions à type de croissance *lacunaire par rapport au type exponentiel* (14); mais je n'insiste pas, car les propriétés des fonctions entières ainsi construites artificiellement sont beaucoup moins importantes que les propriétés des fonctions que l'on rencontre naturellement dans les applications.

XXIV. — Les fonctions méromorphes.

Des résultats que j'ai obtenus sur les fonctions entières on déduit aisément la démonstration directe des théorèmes analogues de M. Picard sur les fonctions méromorphes et plusieurs généralisations de ces théorèmes; mais les énoncés que l'on peut ainsi accumuler ne se distinguent pas essentiellement des énoncés sur les fonctions entières. On peut obtenir des résultats vraiment nouveaux en étudiant la relation entre les propriétés des fonctions entières et la décomposition des fonctions méromorphes en éléments simples; mais je n'ai pas encore publié mes recherches sur ce sujet.

Diverses propriétés particulières des développements de Taylor des fonctions méromorphes ont été indiquées plus haut (XIV).

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

XXV. — L'équation adjointe.

Mon premier travail de quelque étendue (26) a été consacré à l'étude de l'équation adjointe à une équation différentielle linéaire, et en particulier à l'étude des équations équivalentes à leur adjointe. J'ai fait voir com-

ment la différence, déjà signalée par M. Darboux, entre les équations d'ordre pair et les équations d'ordre impair peut être rattachée à la différence qui sépare les transformations corrélatives dans les espaces d'un nombre impair ou d'un nombre pair de dimensions; ou, si l'on préfère, au fait qu'un déterminant symétrique gauche est nécessairement nul si son degré est pair.

Ces considérations m'ont conduit à une méthode nouvelle pour retrouver les expressions, dues à M. Darboux, des intégrales des équations d'ordre impair équivalentes à leur adjointe, sans signe de quadrature. Pour les équations d'ordre pair, le problème analogue ne paraît pas pouvoir être résolu sans quadrature; la méthode géométrique donne le moyen de le ramener à un problème *exactement équivalent,* mais d'énoncé plus simple. Par exemple, pour déterminer, sans signe de quadrature, la forme générale des intégrales de l'équation linéaire du sixième ordre équivalente à son adjointe, il serait *nécessaire et suffisant* de savoir trouver sans quadratures une solution, dépendant de deux fonctions arbitraires, de l'équation

$$\alpha' \beta''' = \gamma''^2,$$

dans laquelle α, β, γ désignent trois fonctions de la même variable t.

Les conséquences géométriques de ces recherches sont brièvement résumées plus loin (XXX).

XXVI. — La croissance des intégrales réelles.

Étant donnée une équation différentielle du premier ordre, algébrique en x, y, y', je me suis proposé d'étudier la rapidité de la croissance d'une intégrale réelle y de cette équation, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs réelles; on suppose que l'intégrale y considérée ne devient pas infinie pour une valeur finie de x; *on peut dès lors affirmer que y croît moins vite que e^{e^x}* (29). Peu de temps après la publication de ce résultat, M. Ernst Lindelöf (*Bulletin de la Société Mathématique,* 1899) en a donné une démonstration nouvelle qui lui a permis de le rendre plus précis, en tenant compte du degré de l'équation différentielle, mise sous forme entière.

J'avais d'abord cru que le résultat précédent pourrait s'étendre aux équations d'ordre supérieur au premier; j'avais même obtenu un résultat analogue pour les équations du second ordre, moyennant certaines restrictions (29); mais j'ai rapidement constaté (18) que, dès le troisième ordre, il est tout à fait impossible de limiter la croissance des intégrales réelles

sans tenir compte de la nature arithmétique des coefficients de l'équation différentielle. C'est là un fait sur lequel je reviendrai tout à l'heure (XXIX). Je le signale simplement ici pour mettre en évidence l'intérêt que peut présenter la remarque suivante (18) : considérons une équation différentielle obtenue en égalant à zéro *un polynome en* $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^p y}{dx^p}$, à coefficients entiers, et désignons par y une intégrale de cette équation, correspondant à des conditions initiales rationnelles $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p-1)}$; on suppose que l'intégrale y est finie et déterminée pour chaque valeur de x comprise entre x_0 et x_1; mais le maximum de la valeur absolue de y dans l'intervalle (x_0, x) peut augmenter indéfiniment lorsque x tend vers x_1 : *La fonction croissante ainsi définie croît moins vite qu'une fonction déterminée* $\Phi(t)$ *de la variable réelle positive*

$$t = \frac{1}{|x - x_1|}.$$

La fonction $\Phi(t)$ ne dépend ni du degré, ni de l'ordre de l'équation différentielle; la détermination effective de $\Phi(t)$ paraît être un problème très difficile : j'ai dû me contenter de le poser; *mais l'existence même de* $\Phi(t)$ *est un fait qu'il m'a paru intéressant de mettre en lumière.*

XXVII. — Intégration par les séries divergentes.

Étant donnée une équation différentielle entre les deux variables x et y, on sait que, dans des cas étendus, la méthode de Briot et Bouquet fournit, au voisinage d'un point singulier x_0, un développement de y suivant les puissances de $x - x_0$, *divergent pour toute valeur de* $x - x_0$.

Ce développement vérifie, cependant, formellement l'équation différentielle; il est donc naturel de se demander s'il ne peut être utilisé pour l'étude ou le calcul des intégrales. Je n'ai pas à rappeler ici l'importance des résultats obtenus dans cette voie, par M. Poincaré, au moyen de la notion de série asymptotique, si rapidement devenue classique. Le principe sur lequel sont basées mes recherches : *Étude des opérations élémentaires effectuées sur les séries divergentes*, est emprunté à M. Poincaré; mais la substitution de la notion de *série sommable* à celle de *série asymptotique* modifie profondément les résultats.

L'une des modifications est nettement désavantageuse : il est bien plus malaisé de démontrer qu'une série est sommable que de démontrer qu'elle représente asymptotiquement une intégrale; d'ailleurs, il est cer-

tain que beaucoup de séries asymptotiques ne sont pas sommables; par suite, même si, comme on peut l'espérer, on apprend à étudier la sommabilité de classes plus étendues de séries, les applications des séries sommables resteront moins nombreuses que celles des séries asymptotiques.

Mais, par contre, cette dernière théorie fournit seulement une valeur approchée des intégrales; pour bien des applications, notamment en Mécanique céleste, il n'y a là nul inconvénient, si l'approximation est assez grande; il serait, cependant, théoriquement préférable d'avoir la valeur exacte : c'est ce que donne ma méthode, dans les cas où elle s'applique.

Le théorème fondamental sur lequel elle est basée s'énonce très simplement :

Si une série absolument sommable vérifie formellement une équation différentielle, la somme de la série est une intégrale de l'équation.

Réciproquement, d'ailleurs, *une série absolument sommable ne peut représenter une intégrale que si elle vérifie formellement l'équation.*

Ces propositions s'étendent sans peine aux séries de Stieltjes (XVII) et à diverses généralisations de ma méthode de sommation.

XXVIII. — Les équations linéaires aux dérivées partielles.

On sait que la théorie de Cauchy conduit à regarder l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles comme dépendant d'un certain nombre de fonctions arbitraires d'un certain nombre d'arguments. On avait d'ailleurs observé depuis longtemps que, dans certains cas, ces divers nombres ne sont pas complètement déterminés, mais ces cas paraissaient exceptionnels. J'ai fait voir que :

Étant donnée une équation linéaire d'un ordre quelconque et à un nombre quelconque de variables indépendantes, l'intégrale générale peut s'exprimer par une formule dans laquelle ne figure qu'une seule fonction arbitraire d'un seul argument (37).

Cette proposition s'étend d'ailleurs sans peine aux systèmes d'équations linéaires. Elle met nettement en évidence le fait que la notion de fonction arbitraire n'a de sens précis que si on la rattache à la théorie des caractères de convergence des séries, fait sur lequel je crois être le premier à avoir appelé l'attention (4, 48).

XXIX. — Le rôle des constantes numériques.

On sait depuis longtemps que la nature arithmétique d'une constante peut influer beaucoup sur les propriétés d'une fonction : par exemple, la fonction z^a présente un caractère tout différent suivant que a est entier, fractionnaire ou incommensurable; elle ne cesse cependant pas d'être une fonction analytique de z.

J'ai donné (5) un exemple d'une équation aux dérivées partielles très simple

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \psi(x,y)$$

et telle qu'une intégrale périodique réelle, généralement *analytique*, cesse de l'être pour une valeur numérique particulière de la constante α. On a ainsi un exemple d'une fonction de deux variables réelles dont toutes les dérivées sont continues, mais qui n'est analytique en aucun point (x, y), *cette fonction se présentant d'une manière nécessaire comme solution d'un problème fort simple dans lequel toutes les données sont analytiques.*

D'autre part, j'ai démontré (18, 29) que, *par l'introduction de constantes convenablement choisies dans une équation différentielle ordinaire* (soit comme coefficients, soit comme conditions initiales : c'est au fond la même chose), *on peut définir des fonctions à croissance aussi rapide que l'on veut*, c'est-à-dire que l'on se heurte à la difficulté qui résulte du théorème de Paul du Bois-Reymond sur le nombre transfini des types de croissance. On s'étonnera moins de ce fait, si l'on réfléchit que, par le développement en fraction continue d'un nombre incommensurable, on peut définir une fonction croissante (VII) dont la croissance n'est pas limitée; toutes les difficultés de l'étude de la croissance sont donc en germe dans l'introduction d'un nombre incommensurable *arbitraire*.

Ces remarques entraînent une conséquence qui me paraît importante : *il n'est pas possible d'exclure de l'Analyse l'étude des complications diverses dont nous venons de parler*; cette exclusion ne serait possible que le jour où l'étude de divers problèmes dont j'ai signalé quelques types (VII, XXVI) serait assez avancée pour que l'on puisse être certain de ne pas introduire les constantes numériques qui peuvent donner lieu à ces complications.

GÉOMÉTRIE.

XXX. — Les quadriques à n dimensions.

J'ai été amené, par l'étude de l'équation adjointe (XXV), à etudier les propriétés géométriques des surfaces du second degré dans l'espace à n dimensions (26). J'ignorais alors certains travaux déjà publiés sur ce sujet, de sorte que j'ai retrouvé quelques résultats connus; je crois cependant avoir mis le premier en évidence d'une manière particulièrement simple et nette, les propriétés des plans générateurs, qui généralisent naturellement les génératrices des quadriques ordinaires. Dans les espaces dont le nombre de dimensions est pair, il y a une seule espèce de plans générateurs; il y en a deux dans les espaces dont le nombre de dimensions est impair. *Si le nombre des dimensions est* $4n+1$, *les plans générateurs ont* $2n$ *dimensions, et deux plans d'un même système ont toujours au moins un point commun, tandis que deux plans de systèmes différents n'en ont, en général, aucun; si le nombre des dimensions de l'espace est* $4n+3$, *les plans générateurs ont* $2n+1$ *dimensions, et, en général, deux plans d'un même système ne se rencontrent pas, tandis que deux plans de systèmes différents se rencontrent toujours.*

Une étude plus approfondie conduit à renfermer ces deux cas, en apparence différents, dans un énoncé unique : *les plans générateurs ayant m dimensions, l'intersection de deux plans d'un même système en a* $m-2k$, *et l'intersection de deux plans de systèmes différents* $m-2k-1$. Si d'ailleurs les plans sont choisis arbitrairement, on doit déterminer k de manière que ces nombres soient égaux à 0 ou à -1, c'est-à-dire de manière que l'intersection se compose d'un point unique ou n'existe pas; on est ainsi conduit, suivant la parité de m, aux conclusions énoncées plus haut.

Dans le cas où il y a un seul système de plans générateurs, les quadriques ont de véritables *lignes asymptotiques* distinctes de ces plans; j'ai montré que la connaissance de ces lignes résulte des recherches de M. Darboux sur l'équation adjointe, et j'en ai donné, de plus, une détermination géométrique directe.

ENSEIGNEMENT.

XXXI. — Arithmétique et Algèbre.

J'ai publié un exposé des éléments de la théorie des nombres, d'après des conférences de M. J. Tannery (46, première partie; la seconde partie de ce livre est de M. J. Drach). Il est naturel de classer aussi ici un petit article sans importance scientifique (40) dans lequel je cherche à simplifier un point très particulier de l'enseignement des fonctions abéliennes, la détermination du nombre des fonctions θ à caractéristiques paires ou impaires, qui est en réalité une question d'Arithmétique élémentaire.

XXXII. — Analyse.

J'ai publié plusieurs petits livres sur la théorie des fonctions (48, 49, 50), les résultats nouveaux qu'ils contiennent ont déjà été indiqués; je pense être arrivé, en outre, à y simplifier sur bien des points l'exposition de faits connus, notamment dans les éléments de la théorie des ensembles.

XXXIII. — Géométrie et Mécanique.

J'ai donné aussi (47) une exposition élémentaire de la théorie des transformations géométriques. J'espère notamment être arrivé à rendre accessibles aux meilleurs élèves de nos lycées les idées si fécondes de M. Darboux sur la Géométrie des sphères, de Plücker et de M. Klein sur la Géométrie des droites, de Sophus Lie sur les transformations de contact, et à leur donner les moyens de commencer à comprendre l'importance de la notion de groupe.

Enfin, j'ai été conduit par mon enseignement à publier deux petits articles sur des questions très élémentaires de Géométrie des surfaces (44) et de Mécanique (45).

29860 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.